Zufallskurven



Der britische Botaniker Robert Brown (links; 1773-1858) beschrieb 1827 die unregelmäßige, zuckende Bewegung von Pollen in einem Wassertropfen. Bereits 1785 hatte der holländische Arzt und Botaniker Jan Ingenhousz (1730-1799) beobachtet, dass Kohlenstaub-Teilchen in Alkohol sich ebenso verhalten. Die Bewegung ist wärmeabhängig und wurde erst 1905 von Albert Einstein theoretisch verstanden.



Die Brownsche Molekularbewegung kannst Du unter dem aufgebauten Mikroskop ansehen. Ein Video dazu findest Du unter http://www.youtube.com/watch?v=ra1mRVzqqck. Die Bewegung der Teilchen entsteht zufällig durch zahlreiche Zusammenstöße mit Wassermolekülen. Der Pfad eines Teilchens ist daher ein klassisches Beispiel einer Zufallskurve.

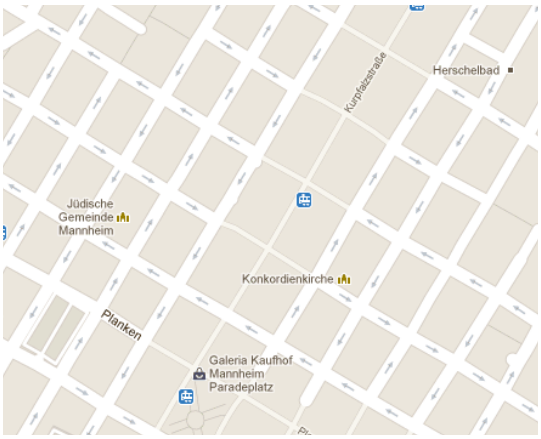
Durch die Zufallsbewegung werden die kleinen Teilchen auch über weitere Strecken transportiert. Öffnet man zum Beispiel einen Parfümflakon in einem Raum so erreicht der Duft nach einer gewissen Zeit jeden anderen Punkt in dem Raum, allein getrieben durch die zufällige Bewegung durch Stöße mit Luftmolekülen[1].

In diesem Modul kannst Du solche und andere Zufallsbewegungen mathematisch untersuchen und mit dem Computer simulieren. Um alles zu vereinfachen, benutzt man häufig das Modell einer zufälligen Bewegung auf einem Gitternetz. Diese Modellierung eines so genannten Random Walks auf einem Gitter kannst Du im nächsten Abschnitt anhand der zufälligen Bewegung einer völlig betrunkenen Person in einem Straßengitter kennen lernen. Dabei ist unter anderem interessant, wie weit so eine Person in einer bestimmten Zeit kommt (Luftlinie). Diese Erkenntnis wird dann auf die Ausbreitung von Krankheiten angewandt. Anschließend erfährst Du, wie man die Ausbreitung von Krankheiten realistischer modelliert. Reduziert auf eine Dimension finden Zufallsbewegungen Anwendung in der Spieltheorie und Finanzmathematik. Beim Glücksspiel ist zum Beispiel die Ruinwahrscheinlichkeit interessant. Diese kannst Du nach dem Durcharbeiten dieses Moduls exakt berechnen und auch in Excel simulieren. Zum Abschluss erfährst Du noch, wie man mit der Zahl π eine Zufallsbewegung programmiert.

[1] Dabei ist allerdings wichtig,andere Transportmechanismen wie Konvektion (Luftströmung)auszuschließen.

3.1 Ein desorientierter Fußgänger - Random Walks

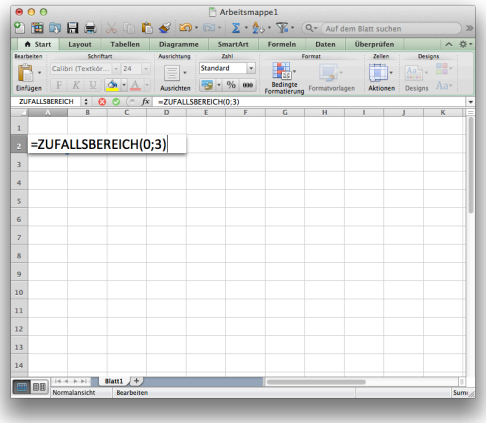




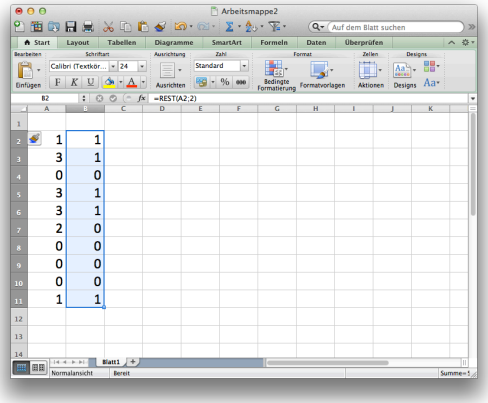
Obelix ist arg angeheitert, doch er muss noch nach Hause gehen. Er befindet sich in Mannheim, wo der Stadtplan einem regelmäßigen Straßengitter entspricht. In seinem Zustand ist Obelix völlig orientierungslos, so dass er an jeder Kreuzung herumtorkelt, und dann rein zufällig und gleichwahrscheinlich eine der 4 möglichen Richtungen einschlägt. Eventuell kehrt er also auch um und geht zurück. So eine Bewegung wird im Folgenden Random Walk genannt.

Das erste Ziel unserer Untersuchungen soll eine Simulation und eine graphische Darstellung der Bewegung des betrunkenen Obelix durch diesen Stadtplan sein. Dazu kannst Du mit 2 Münzwürfen an jeder Kreuzung zufällig die Richtung bestimmen. Schneller geht es aber mit dem Computer.

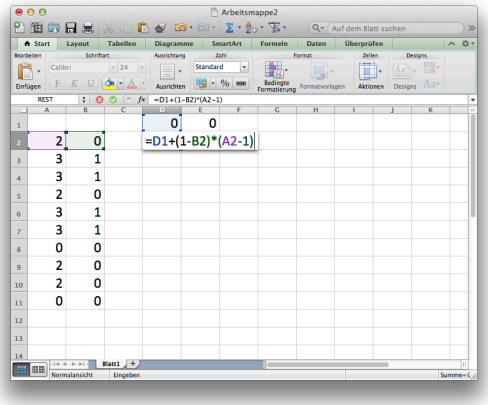
Simulation in Excel



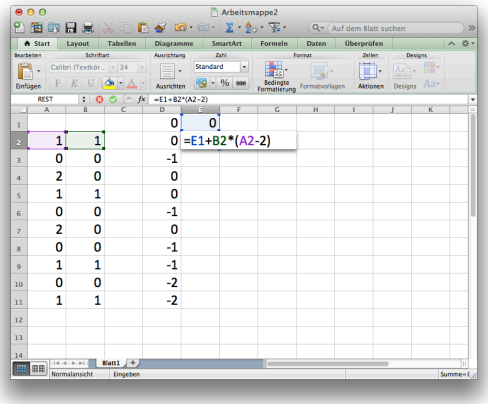
In Excel werden Daten in so genannten Zellen eingegeben. Wenn man eine Zelle mit Inhalt auswählt, kann man den Rahmen an einem Anfasser nach unten ziehen. Excel setzt dann die Eingabe automatisch fort - meist in der gedachten Weise.
Zur Simulation aller 4 möglichen Richtungen erzeugen wir zunächst 10 Zufallszahlen zwischen 0 und 3 in den Zellen A2 bis A11. Dazu geben wir den Befehl *=ZUFALLSBEREICH(0;3)* oder alternativ *=GANZZAHL(4*ZUFALLSZAHL())* ein, drücken *Enter*, markieren die Zelle und ziehen den Rahmen bis in Zeile 11.



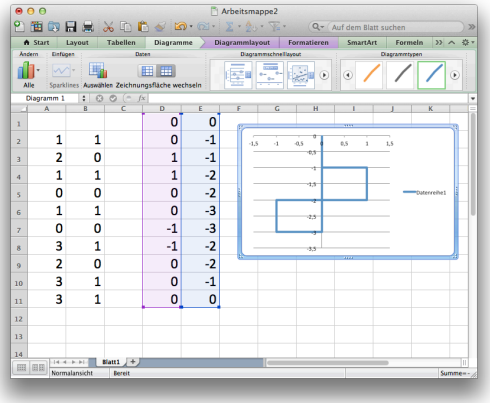
Ist die Zufallszahl in einer Zelle gerade, so soll die Bewegung in x-Richtung verlaufen, ansonsten geht der Betrunkene in y-Richtung. Wir berechnen also eine zweite Spalte, die diese Entscheidung enthält. Dazu wird in Excel die Funktion *=REST(A2;2*) verwendet. Tippe den Befehl ein und ziehe wieder bis in Zeile 11. In dem Beispiel links gehen die Schritte also in y-,y-,x-,y-, usw. Richtung. Nun muss noch zwischen links und rechts bzw. oben und unten entschieden werden.



Für einen x-Schritt ist die Zufallszahl entweder 0 oder 2. Wenn man davon 1 subtrahiert, erhält man -1 oder +1.
Bei einem y-Schritt ist die Zufallszahl entweder 1 oder 3. Hier subtrahiert man einfach 2 und erhält wieder -1 und +1.
In Spalte D speichert man nun die x-Koordinaten der Punkte und in Spalte E die y-Koordinaten. Der Startpunkt (Zeile 1) ist (0|0). Die nächste x-Koordinate ist dann *=D1+(1-B2)*(A2-1)*. Der zweite Faktor ist die Schrittweite (mit Richtung), der erste Faktor selektiert die x-Richtung.



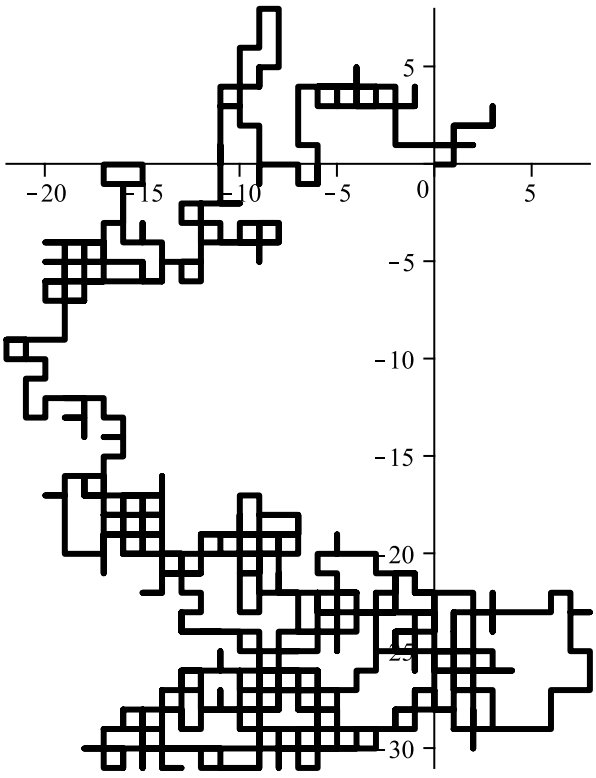
In der Spalte E gibt man analog den Befehl *=E1+B2*(A2-2)* ein um die y-Koordinaten zu erhalten.



Nun markiert man die Spalten D und E und fügt ein Punktediagramm mit Linien (ohne Punktemarkierungen) ein.

Nun kann man die Anzahl der Schritte vergrößern und das Programm zur Analyse auch größerer Random Walks benutzen.

Hier ist ein Beispiel.



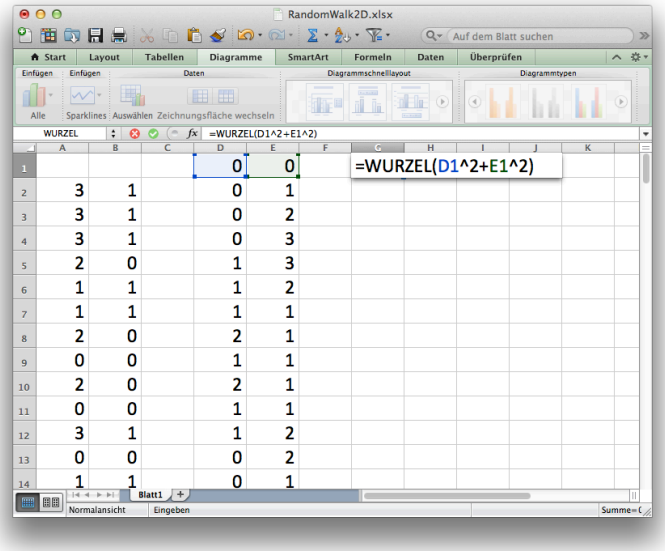
Übung:
Variiere das Excel-Programm. Erzeuge verschiedene Random Walks und studiere, welcher Anteil zum Startpunkt zurückkehrt. Variiere die Anzahl der Schritte und schätze grob ab, wie weit man in n Schritten kommt. (Genauer danach.)

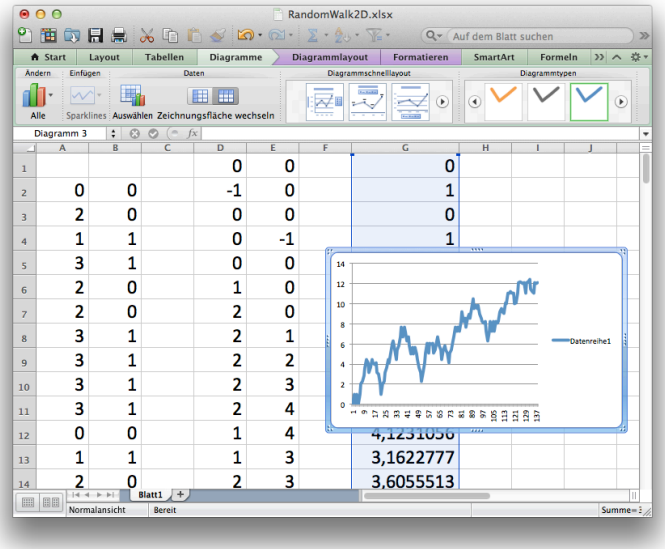
Forschungsproblem
Wie weit reicht ein Random Walk im Mittel mit n Schritten (Luftlinie; für große Werte von n)?

Anders ausgedrückt:

Es dauert nicht mehr lange, und Obelix fällt sturzbetrunken zu Boden und bleibt wo er ist. Vorher schafft er noch n Schritte. Bestimme mit einem Excel-Programm, wie weit er sich im Mittel von seinem Startpunkt entfernt hat, indem Du für verschiedene n jeweils mehrere n-stufige Random Walks erzeugst und den Mittelwert der Entfernungen von Anfangs- und Endpunkt berechnest.

Lösung:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>In dem Excel-Programm oben berechnen wir zunächst die Entfernung vom Anfangspunkt mit dem Satz des Pythagoras. Dies geht mit dem Befehl =WURZEL(D1^2+E1^2).

Von den Werten kann man ein Diagramm (Linie) einfügen.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Eigentlich müsste man die zurückgelegte Entfernung noch über ganz viele Random Walks mitteln, um an den Ergebnissen eine charakteristische Struktur zu erkennen. Dies ist in Excel aber recht mühsam.

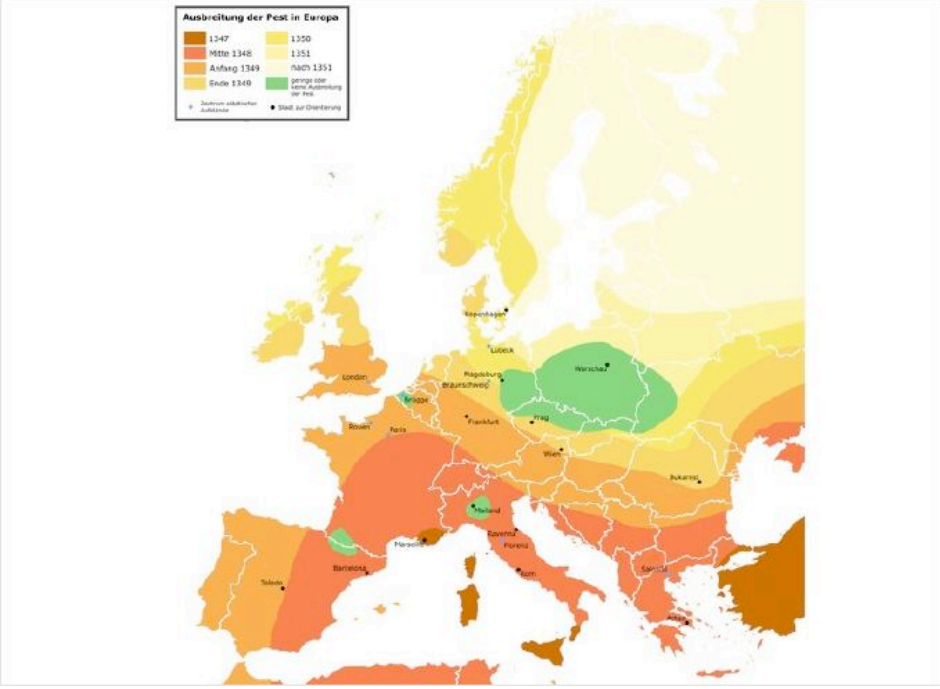
Stattdessen kann man aber problemlos einen Random Walk mit 10000 Schritten erzeugen, indem man die letzte Zeile markiert und den Rahmen bis in die Zeile 10001 erweitert.</td>
</tr>
</table>

Übung: Berechne mit dem Excel Programm einen Random Walk mit 10000 Schritten. Notiere die Entfernung nach dieser Anzahl Schritte und berechne die Arbeitsmappe neu (leere Zelle doppelklicken und Enter drücken). Wiederhole dies und bilde den Mittelwert der erhaltenen Daten (z.B. 20 Mal).

Ergebnis:
Die Entfernung, die eine einfache Zufallsbewegung (Random Walk) in n Schritten überbrückt, ist proportional zu $\sqrt{n}$. Dies stellt einen starken Gegensatz zu einer zielgerichteten Bewegung dar, bei der die zurückgelegte Entfernung in n Schritten proportional zu dieser Anzahl von Schritten ist. Die Entfernung bei einem Random Walk ist also deutlich geringer. Das Gesetz oben kann zum Beispiel bei der Brownschen Molekularbewegung nachgewiesen werden. Eine andere Situation kannst Du nun studieren.

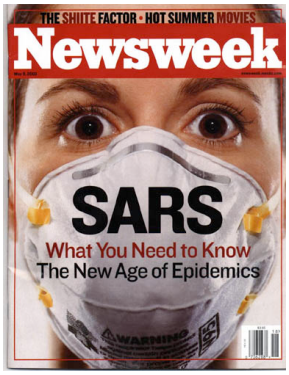
3.2 Ausbreitung von Krankheiten - Der Lévy Flug

Ansteckende Krankheiten breiten sich in einer Gesellschaft ohne schnelle Reisemöglichkeiten nach dem Prinzip der Zufallsbewegung aus. Dies galt zum Beispiel für die erste Pandemie, die schwarze Pest im 14. Jahrhundert.





Diese Art der Krankheitsausbreitung ist recht langsam. In n Zeiteinheiten kommt die Krankheit nur $\sqrt{n}$ räumliche Einheiten weit. Infiziert die Krankheit nach 1 Woche zum Beispiel einen 10km großen Landkreis, so erreicht die Krankheit erst in 4 Wochen einen 20km großen Landkreis, und für die Ansteckung einer Region mit 100km Durchmesser würden 100 Wochen benötigt. In der Tat dauerte die Pest-Pandemie im Mittelalter 4 Jahre, bis schließlich ganz Europa durchseucht war, vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzer_Tod.



Heute stellt sich die Situation jedoch anders dar. Mit modernen Verkehrsmitteln lassen sich in kurzer Zeit sehr große Entfernungen zurücklegen. Unsere Bewegung entspricht daher eher Random Walks, bei denen sich auch die Schreitweite zufällig ändert. Sehr große Schritte sind dabei zwar selten aber eben möglich - man spricht in diesem Zusammenhang von Lévy^2-Flügen. Dadurch breiten sich Krankheiten heute sehr viel schneller aus und die Entstehung von Pandemien wie SARS wird begünstigt.

Bei der Erforschung der Ausbreitung von Seuchen aber auch bei der Erforschung von Gegenmaßnahmen spielen numerische Simulationen eine große Rolle.

Die Programmierung einer solchen Zufallsbewegung erfordert etwas mächtigere Werkzeuge als Excel, wie zum Beispiel Maple. Hast Du keinen Zugriff darauf (z.B. über eine Probelizenz o.ä.), kannst Du den folgenden Programmcode nur theoretisch studieren. Der Code ist aber recht gut verstehbar und Du erfährst, wie man prinzipiell vorgeht.

```
# Vorbereitungen
restart:
with(Statistics):
with(plots):
randomize():

# Anzahl der Schritte
n := 1000:

# Ziehung der zufälligen Richtungswinkel (Bogenmaß)
alpha := Sample(RandomVariable(Uniform(0, 2*Pi)), n):

# Ziehung der zufälligen Schrittlängen
# Dazu wird die sogenannte Cauchy Verteilung genutzt,
# bei der große Zahlen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit
# vorkommen - abhängig von den Parametern , hier 1 und 0.05.
r := Sample(RandomVariable(CauchyDistribution(1, 0.05)), n):

# Berechnung der Schritte
dx := seq(r[i]*cos(alpha[i]), i = 1 .. n):
dy := seq(r[i]*sin(alpha[i]), i = 1 .. n):

# Berechnung des Levy Fluges
x[1] := 0:
y[1] := 0:
for i from 2 to n do
     x[i] := x[i-1]+dx[i]:
     y[i] := y[i-1]+dy[i]:
end:

# Graphische Ausgabe
xx := [seq(x[i], i = 1 .. n)]:
yy := [seq(y[i], i = 1 .. n)]:
pointplot(xx, yy, style = line);
```

Übung:
Gib das Programm in Maple ein (falls vorhanden) und vergleiche den Lévy-Flug mit dem Random Walk eines Betrunkenen. Suche ansonsten im Internet nach einem Simulationsergebnis.

Lévy-Flüge sind bei der Beschreibung vieler weiterer Phänomene interessant. Beim Sehen tasten die Augen Details genau ab, bis der Blickpunkt zum nächsten interessanten Fokus springt. Auf ähnliche Weise jagen Haie ihre Beute, erkunden Wespen ihre Umgebung, verläuft das Kinderspiel „Verstecken“. Informiere Dich über diese und ähnliche Vorgänge im Internet!

Zum Weiterlesen

http://www.weltderphysik.de/de/7161.php
http://www.pro-physik.de/details/news/prophy10516news/news.html?laid=10516
http://en.wikipedia.org/wiki/Lévy_flight

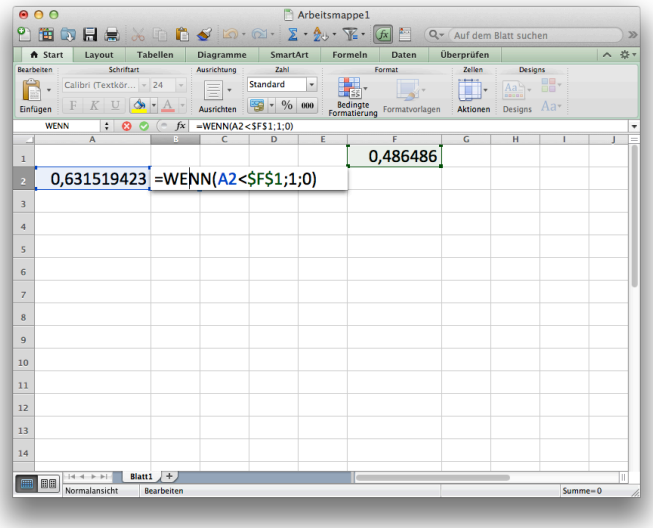
3.3 Gambler‘s ruin - Der eindimensionale Random Walk

Beim Roulette beobachtet man häufig die folgende Strategie. Ein Spieler setzt immer wieder den gleichen Einsatz auf *Rouge*. Fällt die Kugel auf eine der 18 roten Zahlen, so bekommt der Spieler das Doppelte seines Einsatzes ausgezahlt. Fällt die Kugel auf *noir* (ebenfalls 18 Zahlen) oder *Zéro*, so verliert der Spieler den Einsatz. Der Spieler spielt so lange, bis er entweder sein gesamtes Vermögen verspielt hat, also ruiniert ist, oder einen vorher avisierten Gewinn erzielt hat. Die Wahrscheinlichkeit, in einer Runde zu gewinnen ist $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}486$, die Wahrscheinlichkeit zu verlieren ist $q = \frac{19}{37}$.

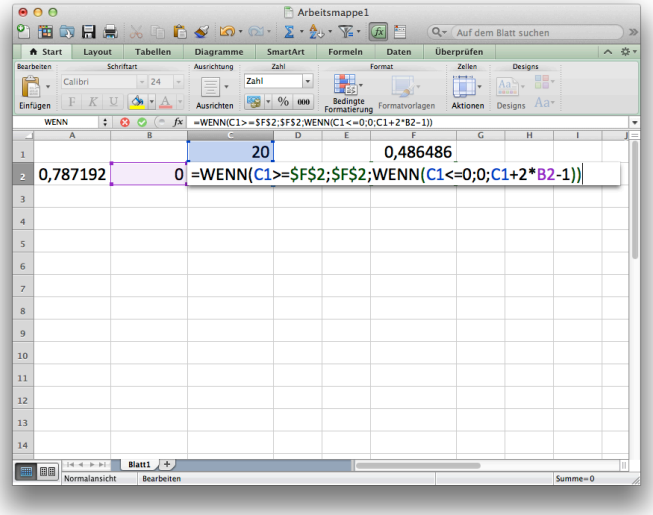


Etwas abstrakter ist die Spielbeschreibung so. Zwei Spieler spielen gegeneinander um Geld. Das Spiel geht über mehrere, eventuell viele Runden. In jeder Runde gewinnt Spieler A mit der Wahrscheinlichkeit p, und er verliert mit der Wahrscheinlichkeit q. Dabei ist $p + q = 1$. Das Vermögen von Spieler A zu Beginn sei z, das Vermögen von beiden Spielern zusammen sei a. Die beiden Spieler spielen so lange, bis einer von beiden ruiniert ist, oder, anders ausgedrückt, bis einer der beiden das Vermögen a erreicht hat.

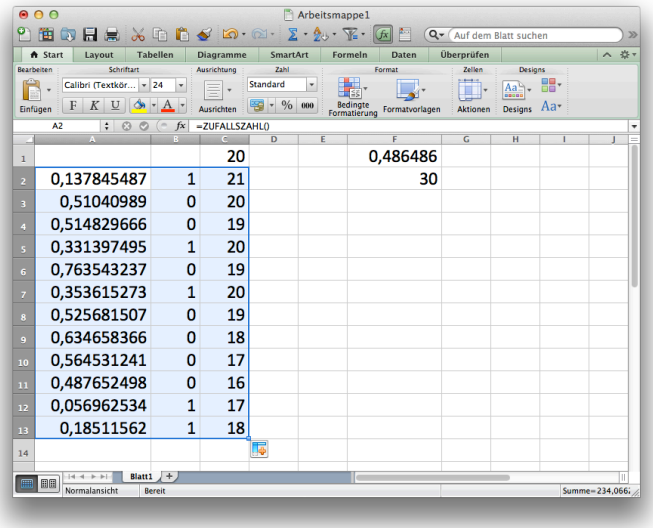
Vor einer Reihe theoretischer Überlegungen kannst Du nun zunächst das Spiel mit Excel simulieren. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Versuch heißt Bernoulli-Verteilung. Mit der Wahrscheinlichkeit p ist eine entsprechend verteilte Zufallsvariable gleich 1 und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ist sie gleich 0.



In Excel müssen solche Zufallszahlen etwas umständlich erzeugt werden. Mit dem Kommando *=ZUFALLSZAHL()* erzeugst Du in Zelle A2 eine (reelle) Zufallszahl zwischen 0 und 1. In Zelle F1 schreibt man den Wert der Gewinnwahrscheinlichkeit p zum Beispiel wie in der Abbildung $0{,}486486 \approx \frac{18}{37}$. Durch den Vergleich von Zufallszahl und Wahrscheinlichkeit kann simuliert werden, ob der Spieler gewinnt oder verliert. Verwende dafür in der Zelle B2 den Befehl *=WENN(A2<F1;1;0).* Das Ergebnis 1 steht dann für Gewinn und das Ergebnis 0 für Verlust. Die $-Zeichen sind wichtig: So greift Excel auf Zellen zu, deren Bezüge fest bleiben und sich **nicht** ändern.



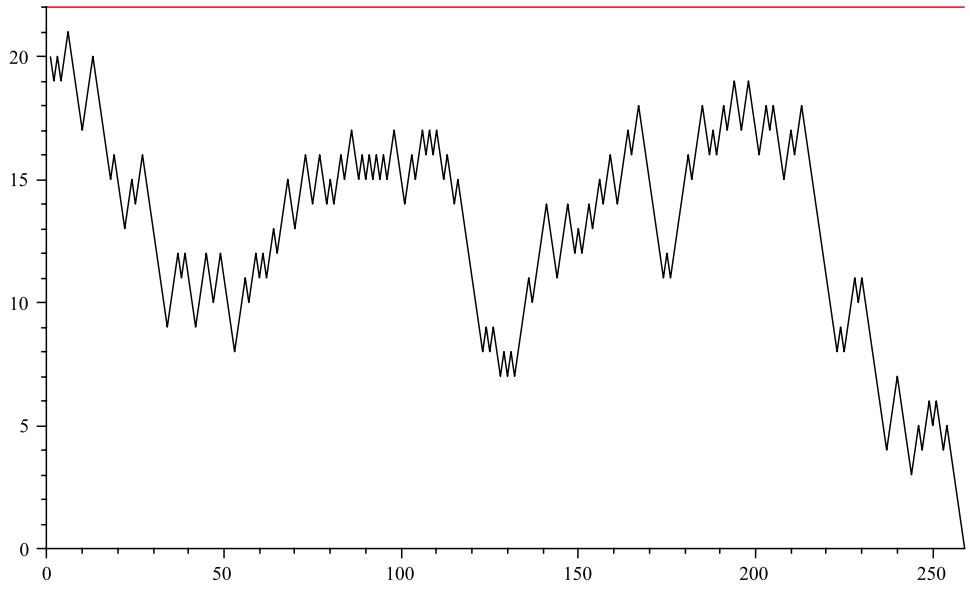
Das Startkapital (z.B. 20) schreibt man in Zelle *C1*, das Zielkapital in Zelle *F2* (z.B. 30). Dann ist das Kapital nach einem Schritt (in Zelle *C2*) gleich *C1+1* bei Erfolg und gleich *C1-1* bei Misserfolg. Die Rechnung in Excel ist *=C1+2*B2-1*. Da der Spieler nach Erreichen seines Zieles oder seines Ruins das Spiel abbricht, muss man noch 2 weitere WENN-Befehle dazu nehmen, siehe Abbildung.



	Nun markiert man die Zellen A2 bis C2 und zieht den Rahmen eine Anzahl Spielrunden nach unten, zum Beispiel 100 oder 1000 (hier 12).
	Eine graphische Ausgabe des Spielverlaufs als Liniendiagramm rundet die Simulation ab. Im gezeigten Fall führte das Spiel zum Ruin des Spielers.

1			20		0,486486
2	0,878666875	0	19		30
3	0,822864431	0	18		
4	0,600004913	0	17		
5	0,765628402	0	16		
6	0,081226786	1	17		
7	0,569646204	0	16		
8	0,119637657	1	17		
9	0,257460253	1	18		
10	0,046497391	1	19		
11	0,216697029	1	20		
12	0,681195753	0	19		
13	0,495135349	0	18		
14	0,301225939	1	19		

Die Abbildung unten zeigt ein Beispiel für einen Spielverlauf beim Roulette, in dem der Spieler mit 20€ startet, das Ziel hat, 22€ zu gewinnen und nach 260 Spielrunden ruiniert ist.



Übung:
Mit dem Excel Programm kannst Du zahlreiche Forschungsfragen lösen. Diese Übung soll Dir als Anregung dienen, selber solche Fragen zu stellen und zu bearbeiten. Zunächst ist interessant, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spieler ruiniert wird bzw. sein Gewinnziel erreicht. Dies wird unten theoretisch hergeleitet, Du kannst aber auch die Arbeitsmappe in Excel immer wieder neu berechnen und so eine Reihe von Spielverläufen erzeugen und damit die o.a. Wahrscheinlichkeit näherungsweise bestimmen. Wenn dies gelungen ist, kannst Du auch verschiedene Spielstrategien untersuchen und die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Strategie bestimmen. Sehr interessant ist auch die mittlere Spieldauer die Du ebenfalls aus einer Anzahl Berechnungen bestimmen kannst.

Theorie
Im Folgenden sollen Deine numerischen Untersuchungen mit einem theoretischen Teil unterfüttert werden. Dazu sei $Q(z)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler A sein Vermögen z verliert. $P(z)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler A - beginnend mit dem Vermögen z - Spieler B ruiniert.

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist die Bestimmung der Funktion $Q(z)$.

Das Vermögen von Spieler A wächst im ersten Schritt mit der Wahrscheinlichkeit p von z auf $z+1$. Mit der Wahrscheinlichkeit q fällt das Vermögen von z auf $z-1$. (Natürlich gilt $p+q=1$.) Daher gilt für die gesamte Verlustwahrscheinlichkeit von Spieler A

$$Q(z) = pQ(z+1) + qQ(z-1). \qquad (1)$$

Natürlich hat der Spieler mit einem Vermögen 0 verloren und mit einem Vermögen a gewonnen. Daher gelten die sogenannten Randbedingungen

$$Q(0)=1,\quad Q(a)=0. \tag{2}$$

Nun soll Gleichung (1) gelöst werden. Dazu sei - wie beim Roulette - zunächst $p \neq q$.

Dann hat Gleichung (1) zwei verschiedene fundamentale Lösungen, nämlich die Funktionen

$$a)\ Q(z)=1,$$

$$b)\ Q(z)=\left(\frac{q}{p}\right)^z.$$

Übung:
Zeige durch Einsetzen, dass diese beiden Gleichungen wirklich Lösungen der Gleichung (1) darstellen.

Übung:
Zeige, dass Vielfache von a) und b) sowie Summen von solchen Vielfachen dann auch Lösungen von Gleichung (1) sind.

Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) lautet

$$Q(z)=A+B\left(\frac{q}{p}\right)^z, \tag{3}$$

wobei die Konstanten A und B nun so zu bestimmen sind, dass die Randbedingungen (2) erfüllt sind.

Übung:
Bestimme die Konstanten A und B der allgemeinen Lösung (3) so, dass die Randbedingungen (2) erfüllt sind. (Erst selber versuchen, dann weiterlesen!)

Lösung:
Da $Q(0)=1$ ist, folgt aus (3)

$$A+B=1.$$

Da andererseits $Q(a)=0$ ist, folgt aus (3) auch

$$A+B\left(\frac{q}{p}\right)^a=0.$$

Durch Bilden der Differenz bekommst Du nun

$$B\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^a\right)=1,\quad \Rightarrow\quad B=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

Die Berechnung von A ist dann einfach:

$$A = 1 - B = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

Die gesuchte Lösung für die Ruinwahrscheinlichkeit von Spieler A ist damit gefunden, denn man muss die Konstanten A und B nur noch in die Lösung (3) einsetzen,

$$Q(z) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}. \qquad (4)$$

Dies ist ein simples aber wirksames Ergebnis, das es Dir nun erlaubt, die Verlustwahrscheinlichkeit beim Roulette zu berechnen.

Beispiel:
Angenommen, ein Casinospieler setzt wie oben beschrieben immer den gleichen Einsatz von 1€ auf *Rouge*. Er startet mit 200€. Sein Ziel ist bescheiden, denn er strebt nur eine Rendite von 10% an, stoppt also, wenn er 220€ Vermögen hat. Also gilt $z = 200,$ und $a = 220.$ Außerdem ist $p = \frac{18}{37}$, $q = \frac{19}{37}$, und daher $\frac{q}{p} = \frac{19}{18} \approx 1{,}05556.$ Die Verlustwahrscheinichkeit ist daher

$$Q(z) = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{220} - \left(\frac{19}{18}\right)^{200}}{\left(\frac{19}{18}\right)^{220} - 1} = 0{,}661.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 66,1%, also in 2 von 3 Casinobesuchen, verzockt dieser Spieler also mit der angegebenen Strategie sein ganzes Vermögen von 200€ und nur in 1 von 3 Fällen nimmt er den bescheidenen Gewinn von 20€ mit nach Hause - nicht gut! Eine Verdoppelung von 200€ auf 400€ ist mit der beschriebenen Strategie so gut wie aussichtslos.

Der Spieler ändert daher seine Strategie. Nun setzt er jedes Mal 10€ auf *Rouge*, während sein Ziel und sein Vermögen gleich bleiben. Mathematisch entspricht der neue Einsatz einer Skalierung des Vermögens um den Faktor 10. Die Ruinwahrscheinlichkeit des Spielers ist dann

$$Q(z) = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{22} - \left(\frac{19}{18}\right)^{20}}{\left(\frac{19}{18}\right)^{22} - 1} = 0{,}147.$$

Nun verliert der Spieler nur noch in 1 von 7 Casinobesuchen sein Vermögen und kommt in 6 von 7 Besuchen mit einem Gewinn von 20€ nach Hause!

Dennoch: Besonders gut ist das auch nicht. Der erwartete Gewinn ist nämlich gleich

$$\mathrm{EW}_{\mathrm{Gewinn}} = a \cdot P(z) - z = a \cdot \big(1 - Q(z)\big) - z.$$

Im ersten Fall ist das gleich -125,42€ pro Casinobesuch, während mit der zweiten Strategie -12,34€ Gewinn pro Casinobesuch erwartet werden können. Natürlich gewinnt die Bank auf lange Sicht immer!

Übung:
Überlege weitere Anwendungsbeispiele der erarbeiteten Formeln. Berechne weitere Beispiele.

Nun muss noch die Gleichung (1) für den Fall $p = q = \frac{1}{2}$ gelöst werden. In diesem Fall heißt das Spiel *fair*. Dann wird aus Gleichung (1)

$$Q(z) = \frac{1}{2}\big(Q(z+1) + Q(z-1)\big),$$

mit den fundamentalen Lösungen

$$a)\, Q(z) = 1,$$
$$b)\, Q(z) = z.$$

Übung:
Zeige, dass a) und b) Lösungen der obigen Gleichung sind.

Die allgemeine Lösung für die Verlustwahrscheinlichkeit ist daher

$$Q(z) = A + Bz.$$

Übung:
Bestimme aus den Randbedingungen (2) die Konstanten A und B und setze sie in $Q(z)$ ein.

Lösung:
Aus $Q(0) = 1$ folgt

$$A = 1,$$

und aus $Q(a) = 0$ folgt

$$1 + Ba = 0, \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{a}.$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit im fairen Fall ist daher

$$Q(z) = 1 - \frac{z}{a}.$$

Hinweis:
Die Überlegungen zum Ruin eines Spielers folgen im wesentlichen dem Klassiker *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Volume I, John Wiley & Sons von William Feller.

Noch mehr Theorie
Eine unbeschränkte Zufallsbewegung mit gleich langen Schritten nach links (Wahrscheinlichkeit q) bzw. rechts (Wahrscheinlichkeit p) ist mathematisch auch hochinteressant und in vielen Details alles andere als einfach.

Zunächst ist aber klar, dass im Mittel von n Schritten $n \cdot p$ nach rechts gehen und $n \cdot q$ nach links. Das heißt, dass eine solche zufällige Bewegung im Mittel in n Schritten die Entfernung $n \cdot (p - q)$ zurücklegt, wenn $p \neq q$ ist. In diesem Fall ist die durchschnittlich zurückgelegte Entfernung also proportional zur Anzahl der Schritte.

Für den Fall $p = q = \frac{1}{2}$ ist keine der beiden Richtungen bevorzugt. Daher ist natürlich der Mittelwert der Endkoordinate gleich 0, wenn die Bewegung im Ursprung startet. Trotzdem wird absolut (also betragsmäßig) betrachtet eine bestimmte Entfernung zurückgelegt. Diese kann man einfach berechnen. Ein Schritt der Zufallsbewegung entspricht dem Münzwurf mit einer fairen Münze. Das zufällige Ergebnis (1 für Kopf, -1 für Zahl) wird mit X_1 für die erste Münze, X_2 für die zweite Münze usw. bezeichnet. Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X wird mit $\langle X \rangle$ bezeichnet. Natürlich ist der Erwartungswert $\langle X_1 \rangle = 0$, da Kopf und Zahl gleichberechtigt fallen. Andererseits ist aber $\langle X_1^2 \rangle = 1$, da das quadrierte Ergebnis des Münzwurfs immer positiv ist.

Für den Pfad zum Endpunkt der Zufallsbewegung nach n Schritten gilt

$$\text{Pfad Endpunkt} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

Der Erwartungswert des Quadrates der Pfadlänge ist daher

$$\left\langle (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 \right\rangle .$$

Wenn man das Quadrat der Klammer berechnet, erhält man eine Summe mit den n Quadraten der Zufallsvariablen X_i sowie allen möglichen Produkten zwischen verschiedenen Zufallsvariablen $X_i \cdot X_j$, mit $i \neq j$. Diese Produkte haben den Wert +1 für das Wurfergebnis Kopf-Kopf und Zahl-Zahl und den Wert -1 für die Wurfergebnisse Kopf-Zahl und Zahl-Kopf. Der Erwartungswert eines jeden dieser gemischten Produkte ist daher gleich 0. Also gilt

$$\begin{aligned} \left\langle (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 \right\rangle &= \left\langle X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \right\rangle \\ &= 1 + 1 + \ldots + 1 = n. \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt heißt das, dass bei einem symmetrischen eindimensionalen Random Walk die Wurzel aus dem Erwartungswert des Quadrates der zurückgelegten Entfernung wie $\sqrt{n}$ mit der Anzahl der Schritte n wächst. In 2 Dimensionen hast Du oben ein ähnliches Statement numerisch belegt. Die zurückgelegte Entfernung wächst damit für große Werte von n deutlich langsamer als im Fall $p \neq q$.

Bonbon

Die Kreiszahl $\pi = 3{,}14149265\ldots$ fasziniert seit jeher alle mathematisch Interessierten, und daher können wir nicht anders, als ihrem Charme auch zu erliegen. Klar ist, dass π irrational ist, also nicht als Bruch dargestellt werden kann, ebenso wurde bewiesen, dass π transzendent ist, also nicht einmal die Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann. Aber ist π auch normal?

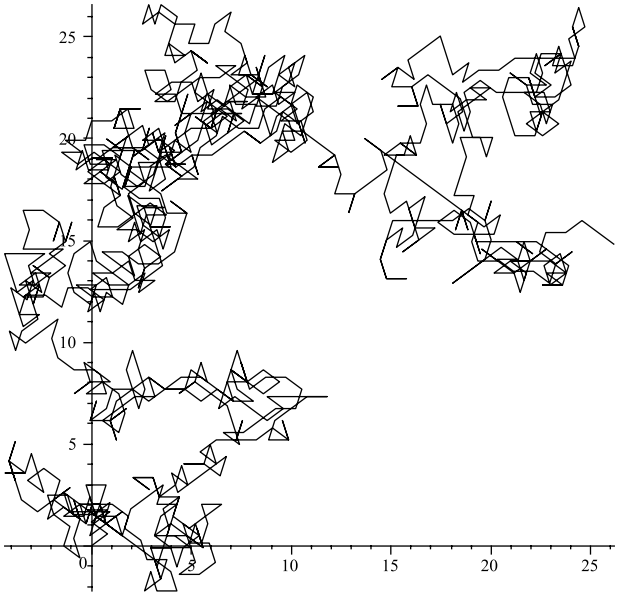
„Als **normale Zahl** wird in der Mathematik eine reelle Zahl bezeichnet, unter deren Nachkommaziffern für jedes $k \geq 0$ alle möglichen *k*-stelligen Ziffernblöcke mit gleichen asymptotischen relativen Häufigkeiten auftreten.“ (Wikipedia).

Eine normale Zahl enthält also jede Ziffernkombination am Stück, und sei sie auch noch so lang. Man könnte also die Bibel in Ziffern kodieren und erwarten, dass der gesamte Text in der Zahl vorkommt. Bei unendlichen *zufälligen* Ziffernfolgen würde man dies ebenfalls erwarten.

Allerdings weiß man nicht, ob π wirklich eine normale Zahl ist. Viele Forscher sind aber der Meinung, dass dies der Fall ist. 2005 haben Physiker die ersten 100 Millionen Ziffern von π untersucht und genau die gleichen Eigenschaften wie bei statistischen Zufallszahlen entdeckt.

Daher ist es reizvoll, die Ziffern der Zahl π auch zur Erzeugung von zufälligen Ereignissen nutzen und zur Programmierung eines Random Walks verwenden.

Das Ergebnis eines Random Walks der Zahl π für die ersten 1000 Ziffern ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Für weitere Anregungen kannst Du auch die Internetseite http://www.random-walk.com/ besuchen. Dort hat ein Designstudent dieses Projekt grafisch aufgearbeitet.